

# 聚合物粘弹性力学模型的电学类比

何平笙 杨海洋 朱平平

(中国科学技术大学高分子科学与工程系 合肥 230026)

**摘 要** 把聚合物粘弹性力学模型中有关的力学元件、连接方式、静态实验和动态力学实验等用线性电路中的电学元件、电路连接、瞬时电路和交变电路来一一类比,发现它们之间的有对应关系,从而可以利用成熟的电路理论来方便地推导出粘弹性力学的有关表达式。

**关键词** 聚合物 粘弹性 力学模型 电学类比

## Electrical Analogy of Mechanical Model of Polymer Viscoelasticity

He Pingsheng, Yang Haiyang, Zhu Pingping

(Department of Polymer Science and Engineering, University of Science and Technology of China, Hefei 230026)

**Abstract** In view of the analogy the of mechanical elements, connecting ways, static and dynamic mechanical tests with electrical elements, circuit diagram, instantaneous and alternative circuits, it is found that there are some similarities between mechanical model in polymer viscoelasticity and electrical circuit, indicating that it will be very conveniene to get the formula of viscoelasticity by means of electrical circuit theory.

**Key words** Polymer, Viscoelasticity, Mechanical model, Electrical analogy

在聚合物粘弹性的学术论文中,可以看到这样的表述:“应用机电类比理论,可以得出……”。但查遍国内出版的《高聚物的结构与性能》或《高分子物理》教材,乃至聚合物力学专门的教学参考书《高聚物的力学性能》都没有发现有关的介绍<sup>[1~3]</sup>。其实,所谓的“机电类比”就是把聚合物粘弹性的力学模型中有关的力学元件、连接方式、静态实验和动态力学实验等,用线性电路中的电学元件、电路连接、瞬时电路和交变电路来一一类比,找出它们之间的对应关系,从而可以利用成熟的电路理论来方便地推导出粘弹性力学的有关表达式。

粘弹性力学模型中,用一个符合虎克定律的弹簧来代表理想弹性体,外力对它作的功全部以能量的形式储存起来,一旦卸去外力,这储存的弹性能又都全部释放出来,没有能量损耗。显然,这样的弹簧与电学中的电容  $C$  相当。力学模型中用一个粘壶(充满符合牛顿流动定律的流体)来代表理想粘流体,在应力的一个周期里,外力作的功全部被粘壶以热的形式消耗掉,没有任何的能量储存。这样,粘壶的粘度  $\eta$  与电学里电阻  $R$  的功能相当。

如果在上述的力学元件上施加了一个应力  $\sigma$ ,就会产生相应的应变  $\varepsilon$ 。类似地,在上述电学元件上施加一个电压  $V$ ,就会产生相应的电荷  $q$ 。因此力学里的应力  $\sigma$  与电学里的电压  $V$  相当,

何平笙 男, 63 岁, 教授, 长期从事高分子物理的教学和教学研究。E-mail: hpsm@ustc.edu.cn

中国科学技术大学教改资助项目

2003-05-24 收稿, 2003-10-30 接受

而应变 $\varepsilon$ 却相当于电荷 $q$ ，则力学里的应变速率 $\dot{\varepsilon}$ 就是电学里的电流 $I(=\dot{q})$ 。

在力学中，理想弹性体的应力与应变有正比的关系(虎克定律)，比例系数是杨氏模量 $E$ 。在电学里，电压与电荷的比例系数是 $1/C$ 。在一般粘弹性力学模型中不出现的另一个力学元件——质量 $m$ ，在电学里对应是电感 $L$ ，因为它们都有自阻尼的特性(表 1)。

为描述同时具有弹性又具有粘性的聚合物粘弹性，通常是把弹簧和粘壶加以组合。最简单的组合是它们的串联组合——Maxwell 模型和并联组合 Voigt 模型。Maxwell 串联模型的特点是作用在相互串联着的弹簧和粘壶上的应力相同，应变相加，Voigt 并联模型的特点是作用在相互并联着的弹簧和粘壶上的应力相加，而应变却相同。与此相对应的是并联电路和串联电路，因为作用在相互并联着的电阻和电容上的电压是相同的，通过它们的电流是相加的，而作用在相互串联着的电阻和电容上的电流是相同的，它们的电压是相加的。

表 1 力学元件、模型与其相对应电学对等物

力 学	电 学
应力 $\sigma$	电压 $V$
应变 $\varepsilon$	电荷 $q$
应变速率 $\dot{\varepsilon}$	电流 $I=\dot{q}$
弹性模量 $E$	电容的倒数 $1/C$
粘度 $\eta$	电阻 $R$
质量 $m$	电感 $L$
$\sigma = G\varepsilon$	$V = (1/C)q$
$\sigma = \eta \dot{\varepsilon}$	$V = RI$
弹簧储存力学能量，	电容储存电能
粘壶损耗力学能量	电阻损耗电能
力学元件串联 (Maxwell 模型)：应力相加，应变相同	并联电路：电压相同，电流相加
力学元件并联 (Voigt 模型)：应力相加，应变相同	串联电路：电流相同，电压相加
$\sigma(t)$ 是阶梯函数的静态试验(蠕变、应力松弛)	$V(t)-I$ 为瞬态电路
$\sigma(t)$ 是交变函数的动力学实验	$V(t)-I$ 为交流电路

上述类比的基础是物理的，从数学来看，这样的类比也是合理的。线性粘弹性的应力和应变关系，以及应力和应变速率的关系 $\sigma \sim \varepsilon, \sigma \sim \dot{\varepsilon}$ 是线性微分方程，而线性电路中 $V \sim I$ 的关系也可以用线性微分方程来描述。由于电路理论快速发展，线性电路的运算已非常成熟，而在粘弹性力学模型教学中，还得从最基本的运动微分方程式出发，一一求解，很是费力。如果对线性电路已非常熟悉，那么可以通过上述力学模型与电学电路的类比(机电类比)，直接写出力学里的粘弹性参数。

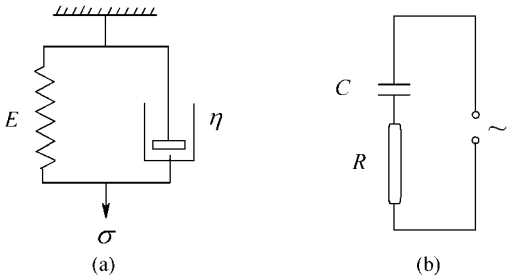


图 1 由弹簧和粘壶组成的 Voigt 并联模型(a)和与之相对应的由电容和电阻组成的串联电路(b)

现在,以 Voigt 并联模型为例来说明机电类比的应用。图 1(a)是由弹簧  $E$  和粘壶  $\eta$ 组成的 Voigt 并联模型,求解它为维持应变  $\varepsilon = \varepsilon^{\wedge} e^{i\omega t}$  时模型的复数柔量。按上述机电类比,它对应于电学里由电容  $C$  和电阻  $R$  组成的串联电路(图 1(b))。由线性电路理论可知,图 1(b)的串联电路在交变电压下的复数阻抗  $Z^*$  为

$$Z^* = R - i \frac{1}{C\omega}$$

按表中所对应的关系,

$$Z^* = \eta - i \frac{E}{\omega}$$

而

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = i\omega\varepsilon$$

则

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = i\omega\varepsilon = \frac{\sigma}{Z^*} = \frac{\sigma}{(\eta - i \frac{E}{\omega})}$$

得

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E + i\omega\eta}$$

复数柔量为:

$$J^* = \frac{\varepsilon}{\sigma} = \frac{1}{E(1 + i\omega\tau)} = J \frac{1}{1 + i\omega\tau}$$

与求解模型的微分运动方程式所得结果完全一致,而这里的推算非常简单。

这里,一个前提条件就是要对线性电路非常熟悉。如果不熟悉线性电路,那么这种类比就失去了应有的意义。编写高分子物理教材的诸多作者,大概也是考虑到化学系的学生一般对线性电路不很熟悉,就在教材中不介绍这样的类比了。

#### 参考文献

- [1] (a) 徐种德, 何平笙, 周漪琴 等. 高聚物的结构和性能. 北京: 科学出版社, 1981、1983、1986、1987.  
(b) 马德柱, 何平笙, 徐种德 等. 高聚物的结构和性能. 第二版 北京: 科学出版社, 1995、1998、1999.
- [2] 何曼君, 陈维孝, 董西侠. 高分子物理. 上海: 复旦大学出版社, 1990.
- [3] 何平笙. 高聚物的力学性能. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 1997.